

Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 6

Przestrzenie Hilberta

math.uwb.edu.pl/~zaf/kwasniewski/pdf/skrypt.pdf

Def. Przestrzenią unitarną (lub też **prehilbertowską**) nazywamy przestrzeń liniową H nad $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ wraz z **iloczynem skalarnym**, czyli funkcją $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{F}$ spełniającą

① $\langle x, x \rangle \geq 0$ oraz $\langle x, x \rangle > 0$ dla $x \neq 0$ (dodatnio-określoność)

② $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$, (liniowość w 1-argumentcie)

③ $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, (antysymetria)

dla $x, y, z \in H$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.



Hilbert



von Neumann

Uw. Warunki (2) i (3), implikują

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x, z \rangle \quad (\text{antyliniowość w 2-argumentcie})$$

Zatem iloczyn skalarny jest **formą półtoraliniową!**

Jeśli $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, to (3) przyjmuje postać $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$. Zatem rzeczywisty iloczyn skalarny jest funkcją **dwuliniową symetryczną!**

Prz. Wzór $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x(k)\overline{y(k)}$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni skończonej wymiarowej $H = \mathbb{F}^n$.

Prz. Wzór $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\overline{y(k)}$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni ciągów sumowalnych w kwadracie $H = \ell^2$.

Prz. Wzór $\langle x, y \rangle = \int_{\Omega} x(t) \cdot \overline{y(t)} d\mu$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni funkcji całkowalnych w kwadracie $H = L^2(\mu)$.

Uw. Nierówność Höldera dla $p = q = 2$, czyli

$$\int_{\Omega} |x(t)y(t)| d\mu \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2,$$

zwana również **nierównością Schwartz**a, gwarantuje że iloczyn skalarny na $L^2(\mu)$ jest poprawnie określony. Zauważmy, że

$$\|x\|_2 = \left(\int_{\Omega} |x(t)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Def. Normą elementu $x \in H$ w przestrzeni unitarnej H nazywamy

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Lem. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2$ dla $x, y \in H$



Tw. (Nierówność Schwartza)

Dla dowolnych wektorów x, y przestrzeni unitarnej zachodzi

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Dowód: Niech $\lambda \in \mathbb{F}$ takie, że $|\lambda| = 1$ oraz $|\langle x, y \rangle| = \lambda \langle x, y \rangle$. Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle t\lambda x + y, t\lambda x + y \rangle &= \|t\lambda x\|^2 + 2 \operatorname{Re}\langle t\lambda x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &= t^2 \|x\|^2 + 2t |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Zatem funkcja $f(t) := t^2 \|x\|^2 + 2t |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2$ jest nieujemna.

Czyli jej wyróżnik jest niedodatni: $\Delta = 4 |\langle x, y \rangle|^2 - 4 \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$.

Po przekształceniach daje to $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. ■

Wn. Funkcja $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ jest normą na przestrzeni unitarnej.

Dowód: $\|x\| = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$. Dla $\lambda \in \mathbb{F}$ mamy

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Dla $x, y \in H$ mamy

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \stackrel{\operatorname{Re} z \leq |z|}{\leq} \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\stackrel{\text{Schwartz}}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Pierwiastkując otrzymujemy nierówność trójkąta. ■

Def. Przestrzeń Hilberta = przestrzeń unitarna, która jest zupełna w normie $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.



Hilbert

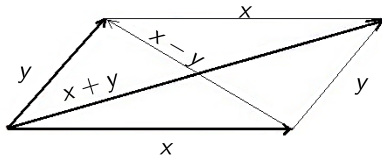


Neumann

Uw. Nierówność Schwartza implikuje, że iloczyn skalarny $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{F}$ funkcją ciągłą w normie, którą zadaje. W szczególności, przedłoża się on do uzupełnienia przestrzeni H .

Uzupełnienie przestrzeni unitarnej jest przestrzenią Hilberta!

Tożsamość równoległoboku mówi, że *suma kwadratów długości boków w równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości przekątnych*



Twierdzenie.

W przestrzeni unitarnej H zachodzi **tożsamość równoległoboku**:

$$\forall_{x,y \in H} \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

oraz iloczyn skalarny jest jednoznacznie wyznaczony przez normę **wzorem polaryzacyjnym**:

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2), & \text{gdy } \mathbb{F} = \mathbb{R}, \\ \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|x + i^k y\|^2, & \text{gdy } \mathbb{F} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Na odwrót, jeśli $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią unormowaną, w której spełniona jest tożsamość równoległoboku, to wzór polaryzacyjny zadaje iloczyn skalarny na X taki, że $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Wn. Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy norma $\|\cdot\|$ spełnia tożsamość równoległoboku.

Prz. Przestrzeń $L^p(\mu)$, $p \geq 1$, dla przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) , jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

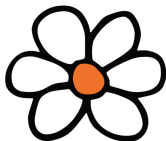
Założmy, że w $L^p(\mu)$ jest spełniona tożsamość równoległoboku.

Weźmy zbiory rozłączne $A, B \in \Sigma$ takie, że $0 < \mu(A), \mu(B) < \infty$.

Kładąc $x := 1_A$ i $y = 1_B$ mamy

$$\|x + y\|_p^2 + \|x - y\|_p^2 = 2\mu(A \cup B)^{\frac{2}{p}},$$

$$2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2) = 2\left(\mu(A)^{\frac{2}{p}} + \mu(B)^{\frac{2}{p}}\right).$$



Dzieląc obustronnie mamy $1 = \left(\frac{\mu(A)}{\mu(A \cup B)}\right)^{\frac{2}{p}} + \left(\frac{\mu(B)}{\mu(A \cup B)}\right)^{\frac{2}{p}}$. Czyli kładąc $\lambda_1 := \frac{\mu(A)}{\mu(A \cup B)}$ oraz $\lambda_2 := \frac{\mu(B)}{\mu(A \cup B)}$ dostajemy liczby takie, że

$$0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 = (\lambda_1)^{\frac{2}{p}} + (\lambda_2)^{\frac{2}{p}}.$$

Te relacje mogą zachodzić tylko wtedy, gdy $p = 2$, gdyż jeśli $p > 2$ to $\lambda_i > (\lambda_i)^{\frac{2}{p}}$, a jeśli $p < 2$ to $\lambda_i < (\lambda_i)^{\frac{2}{p}}$ dla $i = 1, 2$.